На правах рукописи

Батыршин Ильнур Ильдарович

Свойства квази-сводимости и иерархии Ершова

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань — 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Казанский государственный университет им. В.И.Ульянова-Ленина".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Арсланов Марат Мирзаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Ишмухаметов Шамиль Талгатович, кандидат физико-математических наук, доцент Фролов Андрей Николаевич.
Ведущая организация :	государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Новосибирский государственный университет

Защита состоится 12 марта 2009 года в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.24 при ГОУВПО Казанский государственный университет им.В.И.Ульянова-Ленина по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 35.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 23 января 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.24
к.ф.-м.н., доц. Еникеев А.И.

Актуальность темы.

Работа посвящена изучению свойств квази-сводимости и структуры квази-степеней, а также изучению множеств из различных уровней иерархии Ершова, обладающих свойством относительной перечислимости.

Квази-сводимость (Q-сводимость) была введена Тенненбаумом как один из примеров сводимости, отличающейся от T-сводимости на классе вычислимо перечислимых множеств. Q-сводимость является естественным обобщением много-одной сводимости (m-сводимости) и следующим образом связана со сводимостью по перечислимости (е-сводимостью): если множество A квази-сводится к множеству B, то $\omega - A$ e-сводится к множеству $\omega - B$. Кроме этого, на в.п. множествах Q-сводимость влечёт T-сводимость, но не совпадает с ней.

Комбинаторные свойства Q-сводимости и ее различные модификации широко изучались Оманадзе[1]. Соловьев[2] показал, что кобесконечное в.п. множество является гипергиперпростым тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном Q-полном в.п. множестве. Гилл и Морис[3] доказали, что в.п. множество является субкреативным тогда и только тогда, когда оно является Q-полным. Булитко[4] изучал другие критерии Q-полноты в.п. множеств. Селиванов[5] установил связь Q-сводимости с иерархией Клини-Мостовского. Наиболее известным результатом в этой области стало решение Марченковым[6] с помощью свойств Q-сводимости известной проблемы Поста о существовании неполной невычислимой в.п.

[1] Omanadze R.Sh. Quasi-degrees of recursively enumerable sets // Computability and models: perspectives east and west (Cooper S.B. and Goncharov S.S. (eds.)). – Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003. – P. 289-319.

[2] Соловьев В.Д. Q-сводимость и гипергиперпростые множества //Вероятн. методы и киберн. – Казань: изд-во КГУ. – 1974. – вып.11. – С. 121-128.

[3] Gill J.T., Morris P.H. On subcreative sets and S-reducibility // J. Symbolic Logic. – 1974. – V.39. – №4. – P. 669-677.

[4] Булитко В.К. О способах характеризации полных множеств // Изв. АН СССР. Серия математическая. – 1991. – Т.55. – №2. – С. 227-253.

[5] Селиванов В.Л. Об индексных множествах в иерархии Клини-Мостовского // Труды ИМ СО АН СССР. – 1982. – Т.2. – №3. – С. 135-158.

[6] Марченков С.С. Об одном классе неполных множеств // Математические заметки. – 1976. – Т.20. – №4. – С. 473-478.

степени.

Интерес к изучению алгебраической структуры Q-степеней возник после работ Добрицы и Белеградека, в которых исследовалась связь Q-сводимости и алгебраических отношений между группами. Добрица[7] доказал, что для каждого множества $X \subseteq \omega$ существует группа G, проблема равенства слов которой имеет ту же Q-степень, что и X.

Позже Макинтайр[8] показал, что для любых вычислимо представимых групп G и H, проблемы равенства слов в которых имеют степени $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ соответственно, если $\mathbf{g} <_T \mathbf{h}$, то G является подгруппой любой алгебраически замкнутой группы, подгруппой которой является и H. Белеградек[9] показал, что обратное неверно, но становится верным, если T-сводимость заменить на Q-сводимость. Он показал, что для любых вычислимо представимых групп G и H, если G является подгруппой любой алгебраически замкнутой группы, подгруппой которой является H, то проблема равенства слов в группе G квази-сводится к проблеме равенства слов в группе H. Из этих результатов следует, что получение любых результатов о структуре в.п. Q-степеней дает одновременно результаты о свойствах классов конечно порожденных подгрупп алгебраически замкнутых групп.

Изучение алгебраической структуры Q-степеней в.п. множеств было начато Фишером и Амбос-Шпиесом[10], которые показали, что верхняя полурешетка в.п. Q-степеней не является дистрибутивной и не является решеткой. Первые серьезные факты об этой структуре получили Доуни, Лафорт и Ниес[11], которые изучили вопросы существования нижних граней в упорядочении Q-степеней, доказали теорему плотности в.п. Q-

[7] Добрица В.П. О проблеме равенства слов на рекурсивно определенных группах // Третья Всес. конф. по мат. логике. Тезисы докладов. – Новосибирск. – 1974. – С. 63-65.

[8] Macintyre A. Omitting quantifier free types in generic structures // J. Symbolic Logic. – 1972. – V.37. – P. 512-520.

[9] Белеградек О.В. Об алгебраически замкнутых групах // Алгебра и логика. – 1974. – Т.13. – №3. – С. 239–255.

[10] Fischer P., Ambos-Spies K. Q-degrees of r.e. sets // J. Symb. Logic. – 1987. – V.52. – №1. – P. 317.

[11] Downey R., LaForte G.L., Nies A. Computably enumerable sets and Quasi-reducibility // Ann. of Pure and Applied Logic. – 1998. – V.95. – P. 1-35.

степеней и показали, что $\mathcal{R}_Q$ имеет неразрешимую теорию первого порядка. Изучение алгебраической структуры Q-степеней n-в.п. множеств было начато Арслановым и Оманадзе[12], которые исследовали ряд фундаментальных свойств этой структуры.

Другое направление исследований в предлагаемой работе связано с изучением множеств из различных уровней иерархии Ершова, обладающих свойством относительной перечислимости.

В уже ставших классическими работах Ю.Л. Ершов[13] построил иерархию множеств, расположенных ниже $\emptyset'$, теперь известную в литературе как "иерархия Ершова". Место множества A в иерархии определяется по количеству изменений в аппроксимиции множества. Как оказалось, возникающая иерархия множеств исчерпывает всю совокупность множеств, расположенных по тьюринговой сводимости ниже $\emptyset'$. Каждый следующий уровень иерархии содержит все предыдущие, но не совпадает ни с одним из них.

Различные свойства иерархии Ершова широко изучались Арслановым, Джокушем, Крамером, ЛаФортом, Лемппом, Селивановым, Сламаном, Соловеем, Соаром, Хаасом, Шором, Эпштейном[14] и другими.

В своей работе Арсланов, ЛаФорт и Сламан[15] доказали, что если $B \in \Delta_\omega^{-1}$, C - в.п. относительно некоторого $A <_T C$ и $B \leq_T C$, то существует такое множество $D \in \Sigma_2^{-1}$, что $B \leq_T D \leq_T C$. Этот результат показывает, что для любого $n > 1$ степень n-в.п. множества, которая является вычислимо перечислимой относительно некоторой в.п. степени, лежащей ниже ее, является 2-в.п. степенью. Таким образом, относитель-

[12]Arslanov M.M., Omanadze R.Sh. Q-degrees of n-c.e. sets // Illinois Journal of Mathematics. – 2007. – V.51. – №4. – P. 1189-1206.

[13]Ершов Ю.Л. Об одной иерархии множеств, I // Алгебра и Логика. – 1968. – Т.7. –№3. – С. 47-75.
Ершов Ю.Л. Об одной иерархии множеств, II // Алгебра и Логика. – 1968. – Т.7. –№4. – С. 15-48.
Ершов Ю. Л. Об одной иерархии множеств, III // Алгебра и Логика. – 1970. – Т.9. – №1. – С. 34-52.

[14]Обзор результатов см. в Арсланов М.М. Иерархия Ершова. Спецкурс для студентов мехмата. – Казань: Казанский государственный университет, 2007 – 86 с.

[15]Arslanov M.M., LaForte, G.L., Slaman, T.A. Relative enumerability in the difference hierarchy // J. Symbolic Logic. – 1998. – V.63. – P. 411-420.

ная перечислимость на конечных уровнях иерархии Ершова уменьшает "сложность" этих уровней. Долгое время открытым оставался вопрос о том, обладают ли таким же свойством множества, принадлежащие бесконечным уровням иерархии Ершова.

Цель работы.

Целью настоящей работы является:

1. Изучение критериев Q-полноты множеств.

2. Изучение алгебраической структуры Q-степеней, в частности, вопросов изолированности и неизолированности степеней, расщепляемости степеней, дополняемости степеней наверх и вниз.

3. Изучение множеств из различных уровней иерархии Ершова, обладающих свойством относительной перечислимости.

Методы исследования.

В диссертационной работе используются методы теории вычислимости. При доказательстве теорем 6, 7, 8, 9, 13, 14, 16 и 18 используется метод приоритета с конечными нарушениями (метод $\mathbf{0}'$-приоритета). При доказательстве теорем 6, 7 и 9 наряду с методом приоритета используется также метод разрешения Ейтса, адаптированный автором для Q-сводимости.

Основные результаты диссертации.

1) Доказано, что в.п. множество A является Q-полным тогда и только тогда, когда существует такая функция без неподвижных точек $f \leq_Q A$, что множество $B_{f,A} = \{x | W_{g(x)} \subseteq A\}$ - в.п., где $g(x)$ - функция из определения квази-сводимости функции к множеству.

2) Доказано, что между двумя любыми в.п. Q-степенями лежит 2-в.п. Q-степень, являющаяся одновременно изолированной сверху и изолированной снизу.

3) Доказаны плотность неизолированных снизу 2-в.п. Q-степеней в структуре в.п. Q-степеней и плотность вниз неизолированных сверху 2-в.п. Q-степеней в структуре в.п. Q-степеней.

4) Доказано, что расщепляемые 2-в.п. Q-степени существуют под каждой ненулевой 2-в.п. Q-степенью и над каждой неполной в.п. Q-степенью.

5) Результат Арсланова, ЛаФорта и Сламана релятивизирован на бесконечные уровни иерархии Ершова и доказана невозможность усиления условий его релятивизации.

Научная новизна.

Все полученные результаты являются новыми и снабжены подробными доказательствами. Они значительно обогащают и дополняют известные факты о Q-степенях и бесконечных уровнях иерархии Ершова, которые были установлены ранее другими авторами.

Теоретическая и практическая значимость.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в различных областях математической логики, в особенности в теории алгоритмов и теории сложности. Материалы диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов и аспирантов в университетах.

Апробация результатов.

Результаты диссертации докладывались

- на международной конференции "Logic Colloquium 2005" (Афины, Греция, 2005 г.);
- на международной конференции "Мальцевские чтения-2005" (Новосибирск, 2005 г.);

- на международной конференции "Logic Colloquium 2006" (Неймеген, Нидерланды, 2006 г.);
- на международной конференции "Logic Colloquium 2007" (Вроцлав, Польша, 2007 г.);
- на научных семинарах и итоговых конференциях кафедры алгебры и математической логики Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина (2005-2008 гг.).

Публикации.

Основные результаты опубликованы в трех статьях [1]-[3] и четырех тезисах [4]-[7], список которых приведен в конце автореферата. Результаты, полученные в совместной с научным руководителем и профессором Оманадзе работе [3], принадлежат авторам в равной мере.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа изложена на 106 страницах и состоит из введения, двух глав, включающих параграфы, и библиографического списка использованных источников, содержащего 49 наименований.

Содержание работы.

Во введении проведен обзор исследований, связанных с темой диссертации, и приведены основные определения и обозначения, используемые в работе.

Первая глава посвящена изучению Q-полных множеств и алгебраической структуры Q-степеней.

В §1.1. изучаются критерии Σ_1^0-Q-полноты, Σ_2^0-Q-полноты и Σ_3^0-Q-полноты множеств. Вводится определение квази-сводимости функции к множеству, оказывающееся очень удобным для формулирования критериев Q-полноты. Основным результатом параграфа является доказательство следующего критерия квази-полноты множеств:

Теорема 2. *Для любого множества $A \subseteq \omega$ (не обязательно в.п.) следующие условия эквивалентны:*

1) все в.п. множества Q-сводятся к множеству A,

2) существует функция $f \leq_Q A$ такая, что $(\forall x)(W_x \neq W_{f(x)})$ и множество $B_{f,A} = \{x | W_{g(x)} \subseteq A\}$ - в.п.

Следствие 1. *В.п. множество A Q-полно тогда и только тогда, когда $(\exists f \leq_Q A)(\forall x)(W_x \neq W_{f(x)})$ и множество $B_{f,A}$ - в.п.*

Доказательство этого результата релятивизируется на другие уровни арифметической иерархии для доказательства критериев Σ_2^0-полноты и Σ_3^0-полноты множеств:

Теорема 3. *Для любого множества $A \subseteq \omega$ следующие условия эквивалентны:*

1) все Σ_2^0-множества Q-сводятся к множеству A,

2) существует функция $f \leq_Q A$ такая, что $(\forall x)(W_x \neq W_{f(x)})$ и мно-

жество $B_{f,A}$ *является* Σ^0_2.

Следствие 3. Σ^0_2*-множество* A $\Sigma^0_2 - Q$*-полно тогда и только тогда, когда* $(\exists f \leq_Q A)(\forall x)(W_x \neq W_{f(x)})$ *и множество* $B_{f,A} \in \Sigma^0_2$.

Теорема 4. *Для любого множества* $A \subseteq \omega$ *следующие условия эквивалентны:*
1) все Σ^0_3*-множества* Q*-сводятся к множеству* A,
2) существует функция $f \leq_Q A$ *такая, что* $(\forall x)(W_x \not\equiv_m W_{f(x)})$ *и множество* $B_{f,A}$ *является* Σ^0_3.

Следствие 4. Σ^0_3*-множество* A $\Sigma^0_3 - Q$*-полно тогда и только тогда, когда* $(\exists f \leq_Q A)(\forall x)(W_x \neq W_{f(x)})$ *и множество* $B_{f,A} \in \Sigma^0_3$.

Также этот параграф содержит приложение полученного критерия к теории сложности, где через K(x) обозначается беспрефиксная Колмогоровская сложность:

Теорема 5. *Множество* $\mathcal{K} = \{(x,n)|\ x \in 2^{<\omega}, n \in \omega, K(x) \leq n\}$ *является* Q*-полным.*

В §1.2. изучается вопрос существования изолированных 2-в.п. Q-степеней. Основным результатом параграфа является теорема о существовании изолированных одновременно и сверху, и снизу 2-в.п. Q-степеней:

Теорема 6. *Для каждой пары в.п. степеней* $\mathbf{a} <_\mathbf{Q} \mathbf{b}$ *существует собственно 2-в.п. степень* $\mathbf{d}$, $\mathbf{a} <_\mathbf{Q} \mathbf{d} <_\mathbf{Q} \mathbf{b}$, *такая что* $\mathbf{a}$ *изолирует* $\mathbf{d}$ *снизу и* $\mathbf{b}$ *изолирует* $\mathbf{d}$ *сверху.*

Получено интересное следствие этой теоремы, наглядно показывающее отличие полурешетки Q-степеней от полурешетки T-степеней.

Следствие 5. *Существует 2-в.п. степень, которая* Q*-несравнима ни с какой нетривиальной (отличной от* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{0}'$*) в.п. степенью.*

В §1.3. продолжается изучение вопроса, затронутого в параграфе §1.2., а именно изучается вопрос существования неизолированных 2-в.п. степеней. Основными результатами этого параграфа является доказательство плотности неизолированных снизу 2-в.п. Q-степеней в структуре в.п. Q-степеней, и доказательство плотности вниз неизолированных сверху 2-

в.п. Q-степеней в структуре в.п. Q-степеней:

Теорема 7. *Для каждой пары в.п. степеней* $\mathbf{v} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{u}$ *существует такая собственно 2-в.п. степень* $\mathbf{d}$*, что* $\mathbf{v} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{d} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{u}$*, и для любой в.п. степени* $\mathbf{w}$*, если* $\mathbf{w} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{d}$*, то найдется в.п. степень* $\mathbf{a} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{d}$ *такая, что* $\mathbf{a} \not\leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{w}$.

Следствие 7. *Неизолированные снизу 2-в.п.* Q*-степени плотны в структуре в.п.* Q*-степеней.*

Теорема 9. *Для каждой в.п. степени* $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ *существует такая собственно 2-в.п. степень* $\mathbf{d}$*, что* $\mathbf{d} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{v}$*, и для любой в.п. степени* $\mathbf{w}$ *найдется в.п. степень* $\mathbf{a}$ *такая, что* $\mathbf{d} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{a}$ *и* $\mathbf{d} \leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} \not\leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{a}$.

Следствие 8. *Неизолированные сверху 2-в.п.* Q*-степени плотны вниз в структуре в.п.* Q*-степеней.*

Также в этом параграфе построен пример 2-в.п. Q-степени, которая не изолируется снизу не только никакой в.п. Q-степенью, а, вообще, никакой Q-степенью.

Теорема 8. *Существует такая собственно 2-в.п. степень* $\mathbf{d}$*, что для любой* $\mathbf{b} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{d}$ *найдется в.п. степень* $\mathbf{a} <_{\mathbf{Q}} \mathbf{d}$ *такая, что* $\mathbf{a} \not\leq_{\mathbf{Q}} \mathbf{b}$.

В §1.4. изучаются другие фундаментальные свойства алгебраической структуры Q-степеней: расщепляемость, дополняемость наверх и дополняемость вниз. В этом параграфе показано, что расщепляемые 2-в.п. Q-степени существуют под каждой 2-в.п. Q-степенью $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ и над каждой в.п. Q-степенью $\mathbf{b} < \mathbf{0}'$.

Теорема 13. *Пусть* A *и* B *- такие в.п. множества, что* $A - B \not\equiv_Q \emptyset$*. Тогда* A *является непересекающимся объединением таких в.п. множеств* A_0 *и* A_1*, что* $A_i - B \leq_Q A - B$ *и* $A_i - B \not\leq_Q A_{1-i} - B$*,* $i = 0, 1$.

Следствие 11. *Под любым 2-в.п. множеством* $A - B \not\equiv_Q \mathbf{0}$ *существует расщепляемая 2-в.п. степень.*

Теорема 14. *Пусть* A *- такое в.п. множество, что* $K \not\leq_Q A$*. Тогда существуют такие не вычислимые в.п. множества* A_0 *и* A_1*, что*

$A \oplus A_0 \not\leq_Q A \oplus A_1$, $A \oplus A_1 \not\leq_Q A \oplus A_0$ *и* A_0 *и* A_1 *образуют минимальную пару в в.п.* Q*-степенях.*

Следствие 12. *Пусть* $\mathbf{a} < \mathbf{0}'$ *- в.п.* Q*-степень. Тогда существует расщепляемая в.п. степень над* $\mathbf{a}$.

Также показано, что каждая Π^0_2 Q-степень $\mathbf{a}$, $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{0}'$, образует минимальную пару в в.п. степенях с некоторой Δ^0_2 Q-степенью $\mathbf{b}$, несравнимой с $\mathbf{a}$. Тем самым показано, что каждая Π^0_2 Q-степень является дополняемой вниз в в.п. Q-степенях.

Теорема 15. *Для каждого* Π^0_2*-множества* A, $\emptyset <_Q A <_Q \emptyset'$, *существует такое* Δ^0_2*-множество* B, *что* $A|_Q B$ *и для всех в.п. множеств* X, *если* $X \leq_Q A \& X \leq_Q B$, *тогда* $X \leq_Q \emptyset$.

Доказана теорема, показывающая, что в Теореме 15 в общем случае множество B нельзя сделать в.п. множеством, т.е. что ее результат не может быть усилен в этом направлении.

Теорема 16. *Существует такое в.п. множеством* $A <_Q K$, *что для всех невычислимых в.п. множеств* W_e *существует такое невычислимое в.п. множество* X_e, *что* $X_e \leq_Q A$ *и* $X_e \leq_Q W_e$.

Вторая глава посвящена изучению множеств из различных уровней иерархии Ершова, обладающих свойством относительной перечислимости.

В этой главе дается исчерпывающий ответ на возможные релятивизации результата Арсланова, ЛаФорта и Сламана на классы множеств Δ_{v_n}, где $v_n (n > 1)$ - произвольные обозначения клиниевской системы для ω^n соответственно.

Доказано, что этот результат может быть релятивизирован в следующей форме:

Теорема 17. *Для любого* $n > 1$ *если* $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, $B \in \Delta^{-1}_v$, A *- в.п.,* $B \leq_T A \oplus W^A$, *то существует такое множество* $D \in \Sigma^{-1}_c$, *где* $c <_{\mathcal{O}} v$ *и* $|c|_{\mathcal{O}} = \omega^n$, *что* $B \leq_T D \leq_T A \oplus W^A$.

Следствие 13. *Любая 2-CEA, Δ_v^{-1}-степень является Σ_c^{-1}-степенью, где $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, $c <_{\mathcal{O}} v$ и $|c|_{\mathcal{O}} = \omega^n$ $(n > 1)$.*

Также доказаны теоремы, дающие отрицательные ответы на следующие вопросы о дальнейших возможных обобщениях этой теоремы:

1) Можно ли сохранить результат этой теоремы, если ослабить её условия, заменив класс множеств Δ_v^{-1} на более общий класс Σ_v^{-1}?

2) Можно ли усилить эту теорему, сделав множество D из условия принадлежащим классу Σ_a^{-1} для некоторого a такого, что $|a|_{\mathcal{O}} < \omega^n$?

3) Можно ли обобщить эту теорему на более высокий уровень иерархии Ершова - на уровень Δ_v^{-1} для некоторого v такого, что $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^\omega$?

Теорема 18. *Для любого $n > 0$ если $|a|_{\mathcal{O}} = \omega^n$, то существует собственно Σ_a^{-1}-множество B, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$.*

Следствие 14. *Для любого $n > 0$ если $|a|_{\mathcal{O}} = \omega^{n+1}$, то существует множество $B \in \Delta_a^{-1}$, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$, такое, что $(\forall c <_{\mathcal{O}} b)(\forall C \in \Sigma_c^{-1})(B \not\equiv_T C)$, где $b <_{\mathcal{O}} a$ и $|b|_{\mathcal{O}} = \omega^n$.*

Теорема 19. *Пусть $|v|_{\mathcal{O}} = \omega^\omega$, тогда существует множество $B \in \Delta_v^{-1}$, вычислимо перечислимое относительно некоторого в.п. множества $A <_T B$, такое, что $(\forall b <_{\mathcal{O}} v)(\forall C \in \Sigma_b^{-1})(B \not\equiv_T C)$.*

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю Арсланову Марату Мирзаевичу за постановку задач, интерес к исследованиям автора и поддержку в работе.

Публикации автора по теме диссертации в ведущих рецензируемых научных журналов, входящих в список ВАК

[1] Батыршин И.И. *Относительная перечислимость в иерархии Ершова* // Математические заметки. – 2008. – Т.84. – вып.4. – С. 506-515.

[2] Batyrshin I.I. *Quasi-completeness and functions without fixed-points* // Mathematical Logic Quarterly – 2006. – V.52. – №6. – P. 595-601.

[3] Arslanov M.M., Batyrshin I.I., Omanadze R.Sh. *Structural properties of Q-degrees of n-c.e. sets* // Annals of Pure and Applied Logic. – 2008. – V.156. – P. 13-20.

[4] Batyrshin I.I. *Quasi-completeness and functions without fixed-points* // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2007. – V.13. – №2. – P. 266-267.

Публикации автора по теме диссертации в журналах и изданиях, не входящих в список ВАК

[5] Batyrshin I.I. *Relative enumerability in the Ershov's hierarchy* // Logic Colloquium 2005. Book of abstracts. – Athens. – 2005. – P. 49.

[6] Batyrshin I.I. *Quasi-completeness and functions without fixed-points* // Logic Colloquium 2006. Book of abstracts. – Nijmegen. – 2006. - P. 3.

[7] Batyrshin I.I. *The algebraic structure of Quasi-degrees* // Logic Colloquium 2007. Book of abstracts. – Wroclaw. – 2007. – P. 35.